

DOI: 10.16285/j.rsm.2024.0187

基于符号回归算法的结构性砂土损伤规律研究

蒋明镜^{1,2}, 张卢丰¹, 韩 亮¹, 姜朋明¹

(1. 苏州科技大学 土木工程学院, 江苏 苏州 215011; 2. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘 要: 破损参数是用来描述岩土材料由胶结状态向无胶结状态转化的变量, 合理地描述结构性土的破损演化规律是建立结构性土本构模型的关键。目前, 大多损伤规律的研究先假设破损参数的表达式, 随后通过拟合室内试验结果获取相关参数, 从而确定损伤规律, 这些损伤规律的合理性及适用性有待验证。为得到统一的具有微观意义的结构性砂土损伤规律显式数学表达式, 提出了一种基于符号回归的损伤规律预测模型。首先, 基于具有微观物理意义的破损参数定义式, 建立不同离散元 (distinct element method, DEM) 损伤数据库。其次, 采用组合输入变量的方法在等向压缩和等 p 真三轴压缩应力路径上进行参数筛选 (p 为平均有效应力), 结合基于遗传编程的符号回归 (genetic programming-based symbolic regression, GPSR) 算法, 得到不同复杂度的损伤表达式。最终对比不同表达式的预测误差和泛化误差, 选择表现最好的表达式为结构性砂土损伤规律, 即 GPSR 损伤规律。对比前人经典损伤规律表达式, 在不同 DEM 损伤数据库上进行适用性分析。结果表明, GPSR 损伤规律将破损参数表示为塑性偏应变 ε_s 、归一化的平均有效应力 p/p_y 以及中主应力系数 b 的函数, 可以很好地反映结构性土向重塑土转变的过程; GPSR 损伤规律在不同损伤数据库上良好的预测精度进一步证明了其在不同岩土材料上的适用性。研究成果对建立结构砂土本构模型具有一定参考价值。

关 键 词: 结构性砂土; 离散单元法; 机器学习; 符号回归; 损伤规律

中图分类号: TU442

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2024) 12-3768-11

Damage law of structured sand using symbolic regression algorithm

JIANG Ming-jing^{1,2}, ZHANG Lu-feng¹, HAN Liang¹, JIANG Peng-ming¹

(1. School of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou, Jiangsu 215011, China;

2. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The damage parameter is a variable used to describe the transition of geomaterials from a bonded state to an unbonded state. The correct expression of the damage evolution of structured soil is crucial in establishing constitutive models for structured soils. Currently, research on damage laws typically involves assuming expressions for damage parameters and then fitting these parameters using experimental results to establish the damage law. The rationality and applicability of these damage laws are yet to be validated. To derive a unified expression for the damage law of structured sands incorporating microscopic mechanisms, a prediction model based on symbolic regression is proposed. Firstly, using the definitions of damage parameters with microscopic physical significance, various damage databases are constructed using the distinct element method (DEM). Secondly, preliminary parameter screening is conducted on isotropic compression and constant p true triaxial compression stress paths using a method that combines input variables. p is the average effective stress. Combined with the genetic programming-based symbolic regression (GPSR), damage expressions with different complexities are derived. Finally, the best-performing expression is selected as the damage law for structured sand, namely the GPSR damage law, based on an analysis of prediction and generalization errors. The applicability of different expressions is compared using various DEM damage databases. The results show that the GPSR damage law represents damage parameters as functions of plastic deviatoric strain ε_s , normalized mean effective stress p/p_y , and coefficient of intermediate principal stress b . It effectively reflects the transition from structured soil to remolded soil. The outstanding prediction ability of the

收稿日期: 2024-02-06

录用日期: 2024-03-26

基金项目: 国家自然科学基金重点项目 (No.52331010); 国家重点研发计划 (No.2022YFC3003403); 江苏省研究生科研与实践创新计划 (No.SJCX22_1591)。

This work was supported by the Key Program of National Natural Science Foundation of China (52331010), the National Key Research and Development Program of China (2022YFC3003403) and the Jiangsu Provincial Graduate Research and Practice Innovation Program (SJCX22_1591).

第一作者简介: 蒋明镜, 男, 1965 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 国家杰青, 主要从事宏微观土力学与岩土工程数值分析方法方面的研究工作。

E-mail: mingjing.jiang@usts.edu.cn

通讯作者: 韩亮, 男, 1994 年生, 博士, 讲师, 主要从事岩土工程可靠度分析、机器学习在岩土工程中的应用、深海天然气水合物安全开采方面的研究工作。E-mail: hanliang2023@mail.usts.edu.cn

GPSR damage law on different damage databases further demonstrates its applicability to various geomaterials. The research findings are valuable to establish constitutive models for structured sands.

Keywords: structured sand; distinct element method (DEM); machine learning; symbolic regression; damage law

1 引言

天然砂土通常都具有一定的结构性。土体结构性是指组构（土颗粒、孔隙的性状和排列方式）和粒间胶结的统称。由于结构性的存在，结构性土的力学特性明显异于重塑土^[1-4]，主要表现为当外部荷载达到其结构屈服应力时，变形突然增加，随着外部荷载的增加，结构性土的结构逐渐减弱，直至结构性全部消失，其力学特性与重塑土相差不大。结构性土宏观本构模型的核心是描述结构性土向重塑土转变的过程，合理地描述结构性土的损伤规律是建立结构性土宏观本构模型的关键^[5]。目前，国内外学者建立了大量的结构性土本构模型^[6-13]，这些模型中结构破损的描述可大致分为两类：第 1 类将结构性土看作不同成分组合而成的复合材料，通过破损比、破损参数或扰动函数的演变规律将不同成分土体的特性联系起来，进而反映结构性土向重塑土转变的过程；第 2 类在经典的重塑土本构模型的基础上，提出考虑土体结构性的屈服面，定义新的硬化参数及其硬化规律，来描述土体受荷破损后向重塑土转变过程中土体力学特性变化规律。上述描述结构性的内变量统称为破损参数，其演化规律称为损伤规律。这些破损参数或缺少微观力学基础，或缺少物理意义，大都无法通过室内试验直接测定，一般都是先假设破损参数的表达式，随后通过拟合室内试验结果获取相关参数，从而确定损伤规律，合理性及适用性有待考证。

离散单元法（distinct element method, DEM）被认为是研究分析颗粒材料宏微观力学响应的有效工具^[14-18]，已被广泛地应用于模拟离散颗粒材料的力学特性^[19-21]。DEM 能够以无损方式监控数值试样内部应力和颗粒间胶结特性的演变过程，同时提供颗粒间胶结破损的微观信息，是研究结构性土损伤规律的一种适用可行的方法^[22]。

近年来，机器学习在岩土工程领域的研究受到广泛关注，并在不同的方向得到应用。土体性质预测方面，机器学习可以用于预测土体的物理力学特性，比如抗剪强度、压缩模量、渗透率和液塑性指标等。Pham 等^[23]使用基于粒子群优化的自适应网络模糊推理系统（particle swarm optimization-adaptive network based fuzzy inference system,

PANFIS）、基于遗传算法的自适应网络模糊推理系统（genetic algorithm-adaptive network based fuzzy inference system, GANFIS）、支持向量回归（support vector regression, SVR）以及人工神经网络（artificial neural networks, ANN）进行了软土抗剪强度预测；Zhang 等^[24]使用梯度提升回归树（gradient boosted regression tree, GBRT）和遗传算法（genetic algorithm, GA）预测了软黏土的压缩模量；Díaz 等^[25]利用人工智能将液限与中低塑性细粒土的落锥试验联系起来并展开详细研究；Sudakov 等^[26]检测了机器学习方法在渗透率预测方面的适用性，结果表明机器学习在预测土体物理力学特性方面有着巨大潜力。土体行为预测方面，机器学习算法可以用于预测土体的变形和稳定性等行为。Ye 等^[27]采用基于时间序列的反向传播神经网络（back propagation neural network based on time series, TS-BPNN）算法对土体沉降进行了预测，预测结果与监测结果吻合较好；Karir 等^[28]使用多种机器学习算法对天然和人工边坡的稳定性进行预测，得到了预测性能较好的机器学习模型。土体分类和识别方面，机器学习算法可以通过对大量土体样本进行特征提取和数据训练，建立土体的分类模型，实现对不同类型土样的自动识别^[29]。尽管上述研究中的机器学习算法因其卓越的预测能力得到广泛应用，但由于其基本上是黑盒模型，其解释性弱的分析过程和结果有时会受到质疑。在数据驱动模型中，符号回归（symbolic regression, SR）算法不同于传统的机器学习算法，具有开发显式数学表达式的能力，和大部分机器学习算法相比，符号回归模型的透明度和可解释性是一个显著优势。尽管符号回归算法不像人工神经网络应用广泛，但许多研究人员发现了它在土木工程领域的巨大应用潜力^[30-34]。

本文采用基于遗传编程的符号回归模型来预测结构性砂土损伤规律。首先建立了由 6 种宏观变量和破损参数 ω_b 组成的离散元损伤数据库，为了便于描述，根据数据来源分别命名为 JS 数据库和 JZ 数据库（后续章节将详细介绍）。随后对 6 个宏观变量进行筛选，将表现较好的变量组合作为损伤规律预测模型（即基于遗传编程的符号回归（genetic programming-based symbolic regression, GPSR）模型）的输入变量，用于训练结构性砂土损伤规律表

达式, 对比不同复杂度损伤表达式的预测精度和泛化能力, 选出最佳损伤表达式, 即 GPSR 损伤规律。最后将 GPSR 损伤规律与前人经典损伤规律进行对比分析, 验证该损伤规律的泛化性。

2 基于遗传编程的符号回归算法

2.1 符号回归

符号回归是一种数据驱动的方法, 可以根据提供的数据集, 得到输入变量与目标变量的显式数学表达式, 相比传统的机器学习算法, 其具有更强的解释性。模型的函数表达式输出形式以及符号回归强大的处理非线性关系的能力为具体问题中各输入变量对目标变量影响机制的现实解释提供更多的可能性^[35], 使符号回归具有广泛的应用前景^[36-37]。

2.2 基于遗传编程的符号回归

目前, 许多进化算法^[38-40]被用来解决符号回归问题, 遗传编程算法作为最常用的进化算法之一^[41], 在解决符号回归问题中有着良好的表现。遗传编程 (genetic programming, GP) 由 Koza^[42]提出, 算法由函数集和终止符集组成^[43]。其中函数集 F 包含数学运算符 $\{+, -, \times, /\}$ 或函数 ($\sin$ 、 $\tan$ 等) 以及一些表达式 (循环表达式或条件表达式等)。终止符集可以是输入变量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 或常量 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ 。因此, GPSR 算法的输出 y 可用下式表示^[44]:

$$y = f(X, F, c) \quad (1)$$

GPSR 算法的实现可以用树状图说明。如图 1

所示, 函数从根节点开始构造, 根节点以及树中内部节点的内容都是数学运算符, 若构造过程中某节点的内容是变量或常数时, 则该路径停止, 该节点称为终止节点。在构造函数过程中, 通过定义适应度函数来评估初始函数, 适应度越高的函数, 它被选中的概率越大, 进化的概率更高, 后续的进化过程也是如此。同时在树的进化过程中, 还需要进行复制、交叉、突变操作。复制操作即基于适应度, 随机地选择一个个体, 将其复制到下一代种群中。交叉操作是指一个节点下的个体与其他节点下的不同个体交换。突变操作是指每个节点上的算数运算有概率地被随机改变。

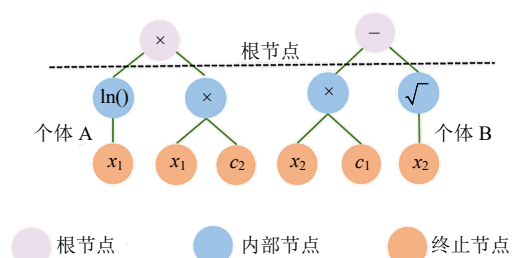


图1 遗传编程示意图 (修改自文献[30])

Fig.1 Schematic diagram of genetic programming (revised from reference[30])

上述3个进化操作的示意图如图2所示, 种群中的函数不断进化, 形成一个新的种群, 直至满足定义的适应度条件或者达到最大进化代数, 从而得到最终的函数表达式。本文在 Eureka 平台上实现了 GPSR 算法。

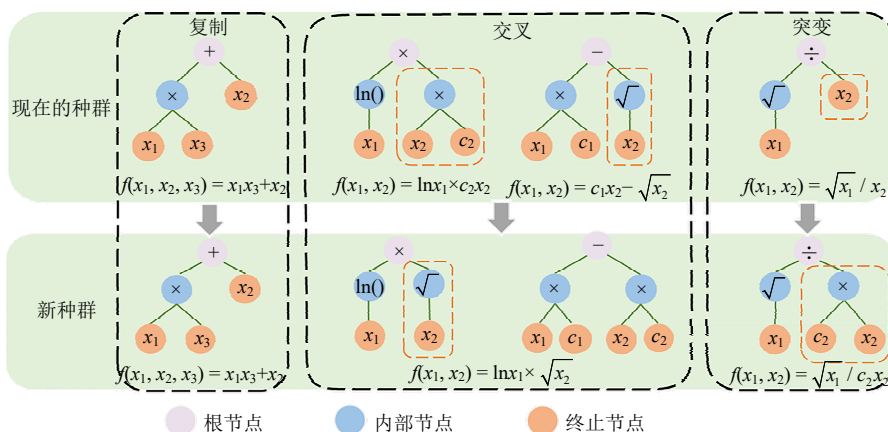


图2 种群演化示意图 (修改自文献[35])

Fig.2 Schematic diagram of the population evolution (revised from reference[35])

2.3 评估指标

本文采用均方根误差 RMSE^[45]、平均绝对误差

MAE^[45]和决定系数 R^2 ^[46] 3 个常用指标来评估模型的预测能力, 其计算公式如下:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_i - p_i)^2} \quad (2)$$

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |m_i - p_i| \quad (3)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - p_i)^2}{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2} \quad (4)$$

式中： m_i 代表第 i 个样本实际输出值； p_i 代表第 i 个样本的预测输出值； n 代表数据集中数据样本的数目； $\bar{m}$ 代表所有实际输出值的平均值。

2.4 灰色关联度

灰色关联度 (grey relational grade, GRG) 是一种用于研究变量之间关联关系的分析方法, 它将各个变量的数据序列进行预处理, 然后通过计算各个变量之间的关联度来刻画它们之间的相互影响程度。给定参考序列 $x_r = x_r(x_r(1), x_r(2), \dots, x_r(n))$ 和对比序列 $x_f = x_f(x_f(1), x_f(2), \dots, x_f(n))$, 两个序列中第 j 个 ($j = 1, 2, \dots, n$) 变量的灰色关联度系数表示如下^[47]:

$$\gamma(x_r^j, x_f^j) = \frac{\min_i \min_j |x_r^j - x_f^j| + \delta \max_i \max_j |x_r^j - x_f^j|}{|x_r^j - x_f^j| + \delta \max_i \max_j |x_r^j - x_f^j|} \quad (5)$$

式中: 分辨系数 δ 取值区间为 $[0, 1]$, 通常认为是 0.5。序列 x_r 和 x_f 之间的 GRG 可以通过下式计算得到:

2.5 公式复杂度

GPSR 模型建立过程中, 种群内个体的生成具有随机性, 因此会运行得到不同复杂度的表达式。参考 Schmidt 等^[48]开发的 Eureqa 软件, 表 1 给出本文公式中所用的每个操作的复杂度系数, 所有操作的复杂度系数相加即是损伤表达式的复杂度。

表 1 特定操作的复杂度系数

Table 1 The complexity coefficient of a particular operation

操作符	复杂度系数	操作符	复杂度系数
常数	1	除	2
输入变量	1	指数函数	4
加	1	幂函数	5
减	1	平方根	4
乘	1	绝对值	4

3 损伤规律预测模型建立流程

图 3 给出了结构性砂土破损演化规律预测模型 (即 GPSR 模型) 的建立过程, 整体分为数据预处理、模型训练和模型选择 3 个主要步骤。

3.1 步骤一: 数据预处理

该步骤建立了结构性砂土损伤数据库, 确认并筛选了结构破损的主要影响因素, 通过划分不同应力路径数据样本量减少了样本量不平衡带来的影响。具体过程如下:

(1) 基于具有微观意义的破损参数定义式 (详

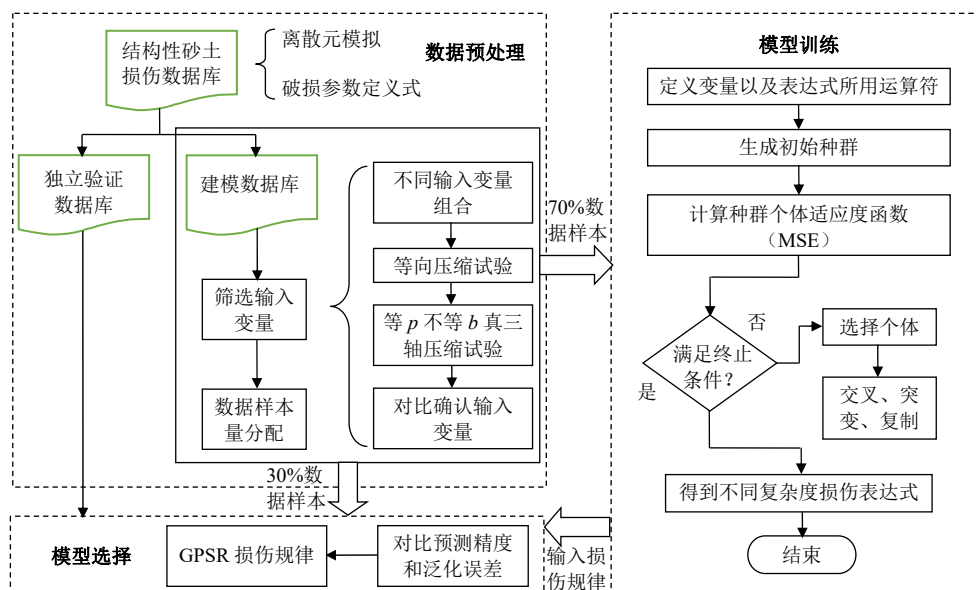


图 3 损伤规律预测模型流程图

Fig.3 Flow chart of the damage law prediction

见下一节), 结合不同结构性砂土离散元模拟结果, 建立了损伤数据库, 该数据库进一步划分为建模数据库和独立验证数据库。

(2) 采用组合输入变量的方法, 以 R^2 为评估指标, 对比不同输入变量组合在等向压缩应力路径和等 p 不等 b 真三轴压缩应力路径上的预测效果, 通过筛选确定了最佳输入变量组合。其中 p 为平均有效应力, b 为中主应力系数, 计算公式如下:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (7)$$

(3) 通过固定间隔取点的方法进行数据样本量分配, 确保不同应力路径下的数据样本量大致相同, 从而克服数据样本量不平衡的问题。

(4) 随机选择 70% 的建模数据库样本作为训练集用于模型训练, 剩余数据样本作为测试集, 并结合独立验证数据库选择模型。

3.2 步骤二: 模型训练

该步骤确定了 GPSR 算法需要用到的数学运算符, 多次训练模型得到了不同复杂度的损伤表达式。具体过程如下:

(1) 确认表达式所用数学运算符, 将最终输入变量组合带入模型训练。

(2) 生成初始种群, 计算种群个体适应度函数, 判定是否满足终止条件 (即满足适应度函数要求或达到最大迭代次数), 不满足则进行交叉、突变、复制操作, 重复上述操作直至模型满足终止条件, 模型结束训练。其中以均方误差函数 MSE 作为个体适应度函数, 计算公式如下:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_i - p_i)^2 \quad (8)$$

(3) 多次训练模型, 得到不同复杂度的损伤表达式。

3.3 步骤三: 损伤模型选择

该步骤通过评估不同损伤表达式的预测精度和形式的简洁性, 确定了最优损伤规律。具体过程如下:

(1) 将 RMSE 作为误差评估指标, 测试集上的误差作为训练误差, 独立验证数据库上的误差作为泛化误差, 对比不同复杂度损伤表达式的预测精度和泛化能力。

(2) 选择形式简洁、预测精度高且泛化性能好的表达式为最优损伤规律, 即 GPSR 损伤规律。

4 GPSR 损伤规律模型建立

4.1 数据来源

本文基于具有微观意义的破损参数定义式, 整理申志福^[49]和张伏光^[5]对不同孔隙比、不同胶结含量砂土在不同应力路径 (等向压缩、等应力比压缩、等 p 不等 b 真三轴压缩、常规三轴剪切试验) 下的离散元模拟结果, 得到两个损伤数据库, 前者命名为 JS 损伤数据库, 后者命名为 JZ 损伤数据库。结合第 3 章中描述的损伤规律预测模型建立流程, 将 JS 数据库定为建模数据库, JZ 数据库定为独立验证数据库。

两位研究人员的模拟数据包含多个变量, 而本文工作的主要目标是建立损伤规律显式表达式, 只需涉及其中的一部分变量。根据前人对损伤规律的研究^[6-13], 破损参数常表达为应力或/和应变的函数, 因此选择塑性体应变 ε_v 、塑性偏应变 ε_s 、平均有效应力 p 、偏应力 q 、归一化平均有效应力 p/p_y 、中主应力系数 b 、破损参数 ω_B 作为损伤数据库的变量, 不同损伤数据库的数据分布如表 2 所示。其中 p_y 为等向压缩初始屈服应力, 与材料本身物理状态 (如孔隙比和胶结含量) 有关, 可通过等向压缩试验求得。其余变量计算公式如下:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (9)$$

$$\varepsilon_s = \sqrt{\frac{2}{9} [(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2]} \quad (10)$$

$$q = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} \quad (11)$$

式中: 下标 x 、 y 、 z 代表应变方向。

表 2 不同数据库变量的基本统计特征

Table 2 Basic statistics of variables in the different databases

数据库	取值类型	ω_B	$\varepsilon_s/\%$	$\varepsilon_v/\%$	p/kPa	q/kPa	p/p_y	b	样本量
JS	最小值	0.00	0.00	-16.96	0.00	0.00	0.00	0.00	37 574
	最大值	1.00	55.00	32.83	72 802.00	35 880.50	68.15	1.00	
	平均值	0.51	17.79	1.56	4 067.09	1 801.32	2.78	0.08	
JZ	最小值	0.00	0.00	-4.34	13.35	0.00	0.06	0.00	468
	最大值	0.86	28.50	4.97	20 520.00	2 354.80	141.03	1.00	
	平均值	0.12	4.59	-0.12	663.00	156.80	4.30	0.30	

关于破损参数 ω_B ，申志福^[49]对结构性砂土的宏观多尺度力学特性进行了深入研究，给出了基于能量守恒的破损参数定义式，即

$$\omega_B^i = \frac{\bar{\sigma}_i^u \delta \varepsilon_i}{\bar{\sigma}_i^u \delta \varepsilon_i + \bar{\sigma}_i^b \delta \varepsilon_i} \quad (12)$$

式中： $\delta \varepsilon$ 为荷载作用下产生的应变增量； $\bar{\sigma}^u$ 为无胶结组分的应力； $\bar{\sigma}^b$ 为胶结组分的应力（就传递荷载的接触而言，无胶结接触属于无胶结组分，胶结接触属于胶结组分）；上下标 $i = 1, 2, 3$ 分别代表大主应力、中主应力和小主应力方向。经过验证，采用单一具有平均意义的 ω_B 是合理的。

4.2 输入变量筛选

采用 GRG 方法检验输入变量与 ω_B 的相关性，结果如图 4 所示，每个面板中的数字表示成对变量间的 GRG 值。其中， ε_s 与 ω_B 的相关性最高，GRG 值为 0.74。其余 5 个输入变量（ ε_v 、 p 、 q 、 p/p_y 、 b ）与 ω_B 的 GRG 值均大于 0.5，说明所选变量适合用于表示 ω_B 。

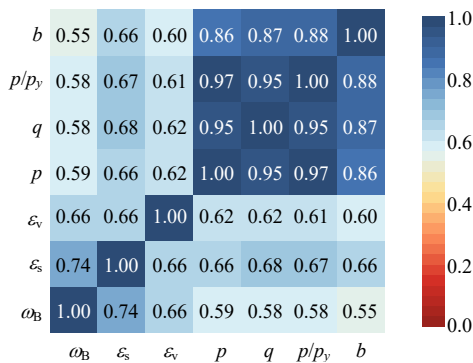


图 4 变量间的 GRG 值

Fig.4 GRG values among variables

为了提高模型训练效率并赋予表达式物理意义，进一步对上节中 6 个输入变量（ ε_v 、 ε_s 、 p 、 q 、 p/p_y 、 b ）进行筛选。从仅有平均有效应力的等向压缩和仅考虑剪切变形的等 p 真三轴压缩试验出发，研究等向压缩过程和剪切过程中的损伤规律，根据不同组合输入变量的预测效果确定最终输入变量。

等向压缩应力路径中， ε_s 、 q 、 b 对 ω_B 没有影响，

仅需考虑 p 、 ε_v 、 p/p_y 的组合。以下组合能有效地描述等向压缩路径下结构性砂土胶结破损规律（ $R^2 > 0.95$ ），具体表达式如下：

$$\omega_B = 1.25 \exp \left[\frac{-34.7}{9.95 + \left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_{v0}} \right)^2} \right] - 0.04 \quad (13)$$

$$\omega_B = \exp \left[\frac{-10.1}{\left(\frac{p}{p_y} \right)^2} \right] \quad (14)$$

$$\omega_B = \exp \left[\frac{-17.5}{\left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_{v0}} \right)^{0.301} \left(\frac{p}{p_y} \right)^2} \right] \quad (15)$$

式中： ε_{v0} 为无量纲化变量，取值 1%。

为了进一步分析剪切变形过程中 ε_s 、 ε_v 、 q 、 p 和 p/p_y 对胶结破损产生的影响，将这 5 种变量进行组合训练，最终发现由剪切变形导致的损伤规律（ $R^2 > 0.95$ ）可描述为

$$\omega_B = 1.16 \exp \left(\frac{\frac{p}{p_y} - 11.6}{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{s0}}} \right) \quad (16)$$

式中： ε_{s0} 为无量纲化变量，取值 1%。

通过等向压缩和等 p 不等 b 真三轴压缩两种路径中的损伤规律表达式形式，可以确定 ε_s 和 p/p_y 两个变量能够很好地描述简单应力路径中由等向压缩和剪切导致的胶结破损演化规律。为了能够更准确地反映结构性砂土复杂应力路径中的损伤过程，在这两种变量的基础上考虑中主应力系数 b 的影响，最终 GPSR 模型的输入变量确认为 ε_s 、 p/p_y 和 b 。

4.3 数据样本分配

JS 离散元损伤数据库中不同应力路径的数据样本量差异较大，训练过程中会产生样本量不平衡问题，最终导致损伤规律在样本量较少的应力路径上预测效果不佳。本文通过固定间隔取点的方法使不同应力路径数据样本量大致相同，表 3 给出了处

表 3 原始和处理后数据库中变量的基本统计特征

Table 3 Basic statistics of variables in the original and processed databases

数据库	取值类型	ω_B	$\varepsilon_s / \%$	p / kPa	b	样本量			
						总量	常规三轴压缩	等应力比压缩	等 p 真三轴压缩
原始 JS 数据	最小值	0.00	0.00	0.00	0.00				
	最大值	1.00	55.00	68.15	1.00	37 574	20 494	8 769	8 311
	平均值	0.51	17.79	2.78	0.08				
处理后 JS 数据	最小值	0.00	0.00	0.05	0.00				
	最大值	1.00	50.00	68.15	1.00	24 793	7 713	8 769	8 311
	平均值	0.46	13.10	4.06	0.12				

理前后数据库中变量的统计信息。特别地, 本文在固定间隔取点时将等向压缩应力路径归入等应力比压缩应力路径中。

5 模型训练结果

5.1 GPSR 损伤规律

根据第 3 章模型的介绍和分析, 结合处理后的 JS 离散元损伤数据库建立 GPSR 模型, 得到了不同复杂度的损伤表达式。

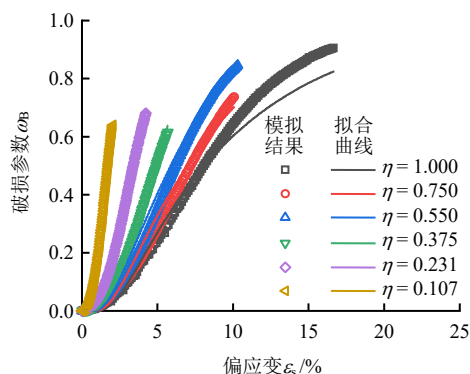
表 4 给出了不同损伤表达式在训练集和测试集上的评估指标, 可以看出复杂度超过 27 的表达式能够准确地描述结构性砂土破损演化规律。从图 5 可知, 模型训练误差随公式复杂度的增大而减小, 复杂度超过 27 的表达式有着相近的预测精度和泛化性能, 考虑到后续损伤规律将用于本构模型中, 从损伤规律的实用性和简洁性出发, 选择图 5 中最佳点处表达式为 GPSR 损伤规律, 表达式形式如下:

$$\omega_B = c_1 \exp \left(\frac{-c_2}{\frac{p}{p_y} + c_3 \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{s0}}} + \frac{-c_4 - c_5 b}{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{s0}} \frac{p}{p_y} - c_6 \frac{p}{p_y}} \right) \quad (17)$$

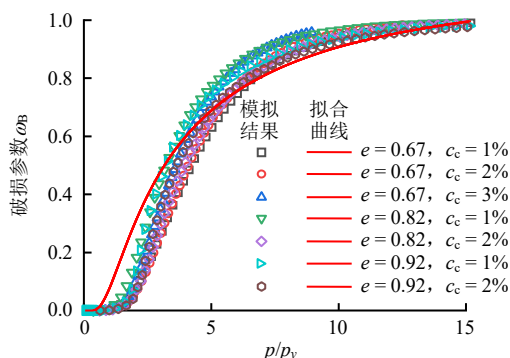
式中: c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 、 c_5 、 c_6 为模型参数, 对于本文结构性砂土 $c_1 = 1.19$, $c_2 = 20.7$, $c_3 = 2.88$, $c_4 =$

0.802, $c_5 = 3.29$, $c_6 = 0.0446$ 。

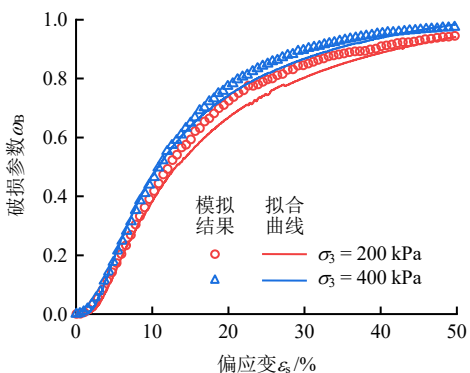
限于篇幅, 图 6 仅给出了孔隙比 e 为 0.82, 胶结含量 c_c 为 1% 的结构性砂土在不同应力路径下



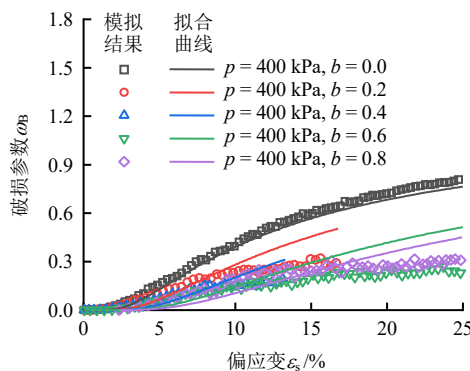
(a) 等应力比压缩



(b) 等向压缩



(c) 常规三轴压缩



(d) 等 p 不等 b 真三轴压缩

表 4 损伤表达式在训练和测试数据集上的评估指标
Table 4 Evaluation index of damage expressions on training and test datasets

公式 复杂度	训练集			测试集		
	RMSE	MAE	R^2	RMSE	MAE	R^2
27	0.069	0.041	0.951	0.070	0.041	0.950
29	0.059	0.037	0.963	0.058	0.037	0.964
31	0.058	0.036	0.965	0.057	0.035	0.966
33	0.057	0.036	0.966	0.056	0.035	0.967
34	0.050	0.032	0.974	0.054	0.034	0.969
35	0.050	0.033	0.972	0.051	0.033	0.973
37	0.050	0.032	0.974	0.050	0.032	0.974
38	0.049	0.032	0.975	0.048	0.032	0.976
39	0.048	0.031	0.976	0.048	0.031	0.976

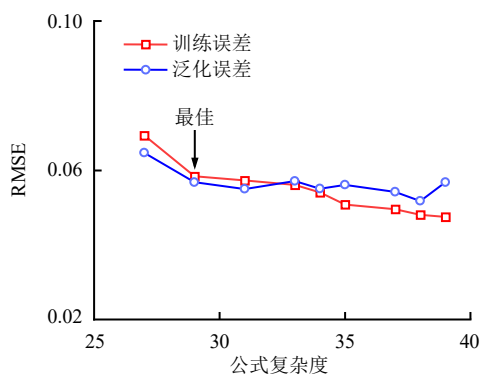


图 5 模型训练误差和泛化误差

Fig.5 Training and generalization errors of the model

图 6 GPSR 损伤规律预测效果

Fig.6 Prediction of GPSR damage law

GPSR 损伤规律的预测结果, 图中散点为离散元模拟结果, 实线为拟合曲线。计算的应力路径包括等应力比压缩 ($\eta = q/p$ 为应力比大小)、等向压缩、常规三轴压缩和等 p 不等 b 真三轴压缩。可以看出, GPSR 损伤规律能够很好地反映等应力比压缩和常规三轴压缩应力路径下结构性砂土向重塑砂土的转化过程。等向压缩试验中, 胶结破坏过程与平均有效应力以及颗粒材料本身物理状态 (孔隙比和胶结含量) 有关, 将平均有效应力用初始屈服应力归一化, 可得到不同孔隙比和胶结含量下几乎一致的胶结破损参数变化曲线, 图 6(b) 中将 ω_B 表示为 p/p_y 的 GPSR 损伤规律能够很好地描述结构性砂土在等向压缩过程中结构的破损演化过程。

对于真三轴压缩复杂应力路径, 本文考虑了 b 以反映其对破损参数的影响, 从图 6(d) 中可以看到 GPSR 损伤规律能够很好地定性反映破损参数的变化, 定量方面有待发现新的输入变量以加强 GPSR 损伤规律在复杂应力路径上的预测效果。

5.2 模型的适用性分析

为了验证 GPSR 损伤规律的适用性, 与已有相关研究建议的损伤规律表达式^[50-51] (见表 5) 进行对比分析。使用七维高科有限公司开发的 1stOpt 软

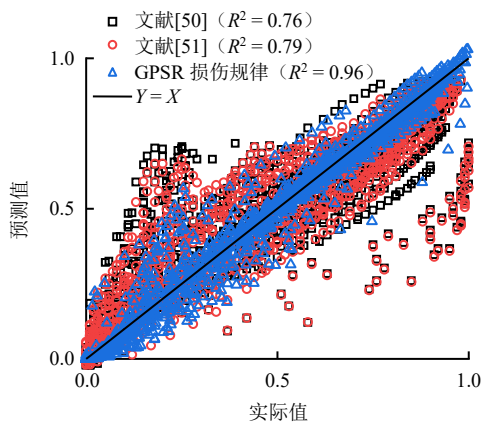
件在 JS 和 JZ 损伤数据库上分别对不同表达式进行拟合。特别地, 表 5 中为 c_a 、 c_b 、 c_c 为模型参数, ε_d 为等效塑性应变, λ_v 为体积破损率, $\bar{\sigma}_{ij}$ 和 $\bar{\sigma}_{ij}^d$ 分别为代表性单元和无胶结颗粒的应力张量, V 和 V_d 分别为试样和无胶结颗粒的体积。

表 5 结构性砂土本构模型中的损伤规律及离散元模拟中破损参数计算式

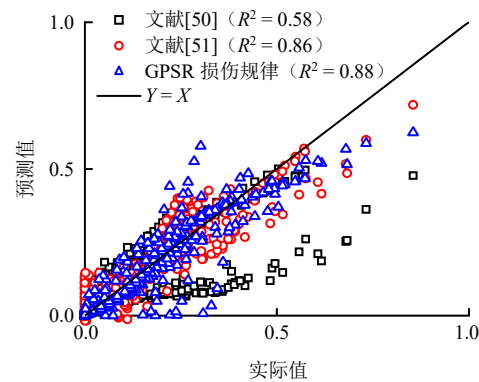
Table 5 Damage laws in constitutive models for structured sands and formula for damage parameters in distinct element method simulations

来源	损伤规律表达式	离散元模拟中破损参数计算
文献[50]	$\omega = 1 - \exp(-c_a \varepsilon_d - c_b)$ $\varepsilon_d = \sqrt{(\varepsilon_v)^2 + (\varepsilon_s)^2}$	$\omega = \lambda_v \bar{\sigma}_{ij}^d / \bar{\sigma}_{ij}$
文献[51]	$\omega = 1 - \exp(-c_a \varepsilon_v - c_b \varepsilon_s - c_c)$	$\lambda_v = V_d / V$

图 7 给出了 GPSR 损伤规律和两种经典损伤规律在不同数据库上 ω_B 预测值和实际值的对比散点图。从图中可以看到, GPSR 损伤规律预测得到的数据聚集在 $Y = X$ 线上, 意味着相比经典损伤规律, GPSR 损伤规律在 JS 和 JZ 上有着更好的预测效果, 同时也证明了 GPSR 损伤规律适用于描述不同结构性土胶结破损演化规律。



(a) 基于 JS 数据库的验证



(b) 基于 JZ 数据库的验证

图 7 基于不同数据库的损伤规律验证

Fig.7 Validation on damage law based on different datasets

6 结 论

本文根据不同结构性砂土在多种应力路径下的离散元模拟结果, 整理得到结构性砂土损伤数据库 (即 JS 和 JZ 损伤数据库)。结合具有微观物理意义的破损参数定义式, 提出了一种基于 GPSR 算法的损伤规律预测模型。经过模型验证, 得出以下结论:

(1) 通过组合变量的方法筛选输入变量, 结合 JS 和 JZ 损伤数据库建立了 GPSR 模型。对比不同复杂度的损伤表达式, 选择形式简洁且性能较好的表达式为 GPSR 损伤规律, 该规律将破损参数表示为塑性偏应变 ε_s 、归一化的平均有效应力 p/p_y 和中主应力系数 b 的函数。

(2) GPSR 损伤规律能够很好地描述简单应力路径 (常规三轴压缩、等应力比压缩、等向压缩)

上砂土结构性破损,在复杂应力路径上也能较好地定性反映结构性土向重塑土的转化过程,定量方面仍有改进空间。

(3) 将 GPSR 损伤规律与经典损伤规律在 JS 和 JZ 损伤数据库上进行对比,结果表明 GPSR 损伤规律在不同岩土材料上有着更好的预测精度。

综上所述, GPSR 损伤规律能从定性和定量的角度较好地描述结构性砂土胶结破损演化过程,适用于不同土性的岩土材料,重新拟合模型参数即可。此外,还可将 GPSR 损伤规律引入屈服函数、应力剪胀关系和硬化规律中用于优化结构性砂土宏观本构模型,作者后续将对此展开研究。

参考文献

- [1] 沈珠江. 土体结构性的数学模型——21 世纪土力学的核心问题[J]. 岩土工程学报, 1996, 18(1): 95-97.
SHEN Zhu-jiang. Mathematical model for structural soils—one of key issues on soil mechanics in the 21st century[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1996, 18(1): 95-97.
- [2] LEROUEIL S, VAUGHAN P R. The general and congruent effects of structure in natural soils and weak rocks[J]. *Géotechnique*, 1990, 40(3): 467-488.
- [3] JIANG M J, PENG L C, ZHU H H, et al. Macro-and micro-properties of two natural marine clays in China[J]. *China Ocean Engineering*, 2009, 23(2): 329-344.
- [4] BURLAND J B, RAMPOLLO S, GEORGIANOU V N, et al. A laboratory study of the strength of four stiff clays[J]. *Géotechnique*, 1996, 46(3): 491-514.
- [5] 张伏光. 基于微观破损机理的结构性砂土三维本构模型研究[D]. 上海: 同济大学, 2017.
ZHANG Fu-guang. A study on the three-dimensional constitutive model for structured sands based on the micro-mechanism of structure degradation[D]. Shanghai: Tongji University, 2017.
- [6] 沈珠江. 结构性黏土的弹塑性损伤模型[J]. 岩土工程学报, 1993, 15(3): 21-28.
SHEN Zhu-jiang. An elasto-plastic damage model for cemented clays[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1993, 15(3): 21-28.
- [7] 沈珠江. 结构性黏土的非线性损伤力学模型[J]. 水利水运科学研究, 1993(3): 247-255.
SHEN Zhu-jiang. A nonlinear damage model for structured clay[J]. *Journal of Nanjing Hydraulic Research Institute*, 1993(3): 247-255.
- [8] 沈珠江, 刘恩龙, 陈铁林. 岩土二元介质模型的一般应力应变关系[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(5): 489-494.
SHEN Zhu-jiang, LIU En-long, CHEN Tie-lin. Generalized stress-strain relationship of binary medium model for geological materials[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2005, 27(5): 489-494.
- [9] DESAI C S. Disturbed state concept (DSC) for constitutive modeling of geologic materials and beyond[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [10] ASAOKA A, NAKANO M, NODA T. Superloading yield surface concept for highly structured soil behavior[J]. *Soils and Foundations*, 2000, 40(2): 99-110.
- [11] NOVA R, CASTELLANZA R, TAMAGNINI C. A constitutive model for bonded geomaterials subject to mechanical and/or chemical degradation[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003, 27(9): 705-732.
- [12] ROUAINIA M, WOOD D M. A kinematic hardening constitutive model for natural clays with loss of structure[J]. *Géotechnique*, 2000, 50(2): 153-164.
- [13] LIU M D, CARTER J P. A structured Cam Clay model[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2002, 39(6): 1313-1332.
- [14] CUNDALL P A, STRACK O D L. A discrete numerical model for granular assemblies[J]. *Géotechnique*, 1979, 29(1): 47-65.
- [15] THORNTON C. Numerical simulations of deviatoric shear deformation of granular media[J]. *Géotechnique*, 2000, 50(1): 43-53.
- [16] JIANG M J, YU H S, HARRIS D. A novel discrete model for granular material incorporating rolling resistance[J]. *Computers and Geotechnics*, 2005, 32(5): 340-357.
- [17] 蒋明镜. 现代土力学研究的新视野——宏微观土力学[J]. 岩土工程学报, 2019, 41(2): 195-254.
JIANG Ming-jing. New paradigm for modern soil mechanics: geomechanics from micro to macro[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2019, 41(2): 195-254.
- [18] JIANG M J, KONRAD J M, LEROUIL S. An efficient technique for generating homogeneous specimens for DEM studies[J]. *Computers and Geotechnics*, 2003, 30(7): 579-597.
- [19] O'SULLIVAN C, WADEE M A, HANLEY K J, et al. Use of DEM and elastic stability analysis to explain the influence of the intermediate principal stress on shear strength[J]. *Géotechnique*, 2013, 63(15): 1298-1309.

- [20] HUANG X, O'SULLIVAN C, HANLEY K J, et al. Discrete-element method analysis of the state parameter[J]. **Géotechnique**, 2014, 64(12): 954-965.
- [21] THORNTON C, ZHANG L. On the evolution of stress and microstructure during general 3D deviatoric straining of granular media[J]. **Géotechnique**, 2010, 60(5): 333-341.
- [22] 孙渝刚. 结构性砂土宏微观力学特性的试验研究与数值模拟[D]. 上海: 同济大学, 2012.
- SUN Yu-gang. Experimental and numerical investigation on macro- and micro- mechanical behaviors of structural sands[D]. Shanghai: Tongji University, 2012.
- [23] PHAM B T, SON L H, HOANG T A, et al. Prediction of shear strength of soft soil using machine learning methods[J]. **Catena**, 2018, 166: 181-191.
- [24] ZHANG D M, ZHANG J Z, HUANG H W, et al. Machine learning-based prediction of soil compression modulus with application of 1D settlement [J]. **Journal of Zhejiang University-Science A (Applied Physics & Engineering)**, 2020, 21(6): 430-444.
- [25] DÍAZ E, PASTOR J L, RABAT Á, et al. Machine learning techniques for relating liquid limit obtained by Casagrande cup and fall cone test in low-medium plasticity fine grained soils[J]. **Engineering Geology**, 2021, 294: 106381.
- [26] SUDAKOV O, BURNAEV E, KOROTEEV D. Driving digital rock towards machine learning: predicting permeability with gradient boosting and deep neural networks[J]. **Computers & Geosciences**, 2019, 127: 91-98.
- [27] YE X W, JIN T, CHEN Y M. Machine learning-based forecasting of soil settlement induced by shield tunneling construction[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2022, 124: 104452.
- [28] KARIR D, RAY A, KUMAR BHARATI A K, et al. Stability prediction of a natural and man-made slope using various machine learning algorithms[J]. **Transportation Geotechnics**, 2022, 34: 100745.
- [29] COSTA A, WANG Z Z, GOH S H, et al. A smart sensor-data-driven optimization framework for improving the safety of excavation operations[J]. **Expert Systems with Applications**, 2022, 193: 116413.
- [30] ZHANG Q Y, BARRI K, JIAO P C, et al. Genetic programming in civil engineering: advent, applications and future trends[J]. **Artificial Intelligence Review**, 2021, 54: 1863-1885.
- [31] ZHONG J, FENG L, ONG Y S. Gene expression programming: a survey[J]. **IEEE Computational Intelligence Magazine**, 2017, 12(3): 54-72.
- [32] OZCAN F. Gene expression programming based formulations for splitting tensile strength of concrete[J]. **Construction and Building Materials**, 2012, 26(1): 404-410.
- [33] OLTEAN M, DUMITRESCU D. Evolving TSP heuristics using multi expression programming[C]//International Conference on Computational Science. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004: 670-673.
- [34] OLTEAN M, GROȘAN C. Evolving evolutionary algorithms using multi expression programming[C]//European Conference on Artificial Life. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003: 651-658.
- [35] WU Z D, YANG Q, WANG X C, et al. Preset model of bending force in 6-high universal crown tandem cold rolling mill based on symbolic regression[J]. **Ironmaking & Steelmaking**, 2023, 50(11): 1-15.
- [36] WANG Y Q, WAGNER N, RONDINELLI J M. Symbolic regression in materials science[J]. **MRS Communications**, 2019, 9(3): 793-805.
- [37] LU Q, REN J, WANG Z G. Using genetic programming with prior formula knowledge to solve symbolic regression problem[J]. **Computational Intelligence and Neuroscience**, 2016(1): 1021378.
- [38] FERREIRA C. Gene expression programming: a new adaptive algorithm for solving problems[J]. **Complex Systems**, 2001, 13(2): 87-129.
- [39] O'NEILL M, RYAN C. Grammatical evolution[J]. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, 2001, 5(4): 349-358.
- [40] OPLATKOVA Z, ZELINKA I. Symbolic regression and evolutionary computation in setting an optimal trajectory for a robot[C]//18th International Workshop on Database and Expert Systems Applications. Regensburg: IEEE, 2007: 168-172.
- [41] KOVAČIČ M, AARLER B. Application of the genetic programming for increasing the soft annealing productivity in steel industry[J]. **Materials and Manufacturing Processes**, 2009, 24(3): 369-374.
- [42] KOZA J R. Genetic programming as a means for programming computers by natural selection[J]. **Statistics and Computing**, 1994, 4(2): 87-112.
- [43] CHENG Z L, ZHOU W H, GARG A. Genetic programming model for estimating soil suction in shallow

- soil layers in the vicinity of a tree[J]. **Engineering Geology**, 2020, 268: 105506.
- [44] ZHANG P, YIN Z Y, JIN Y F. Machine learning-based modelling of soil properties for geotechnical design: review, tool development and comparison[J]. **Archives of Computational Methods in Engineering**, 2022, 29(2): 1229-1245.
- [45] CHAI T, DRAXLER R R. Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? – arguments against avoiding RMSE in the literature[J]. **Geoscientific Model Development**, 2014, 7(3): 1247-1250.
- [46] ZHANG D B. A coefficient of determination for generalized linear models[J]. **The American Statistician**, 2017, 71(4): 310-316.
- [47] ZHANG P, YIN Z Y, JIN Y F, et al. A novel hybrid surrogate intelligent model for creep index prediction based on particle swarm optimization and random forest[J]. **Engineering Geology**, 2020, 265: 105328.
- [48] SCHMIDT M, LIPSON H. Distilling free-form natural laws from experimental data[J]. **Science**, 2009, 324(5923): 81-85.
- [49] 申志福. 深海能源土力学特性三维多尺度数值模拟[D]. 上海: 同济大学, 2016.
- SHEN Zhi-fu. Three-dimensional multi-scale numerical simulations of the mechanical behavior of methane hydrate bearing sediments[D]. Shanghai: Tongji University, 2016.
- [50] 蒋明镜, 周卫, 刘静德, 等. 基于微观力学机制的各向异性结构性砂土的本构模型研究[J]. **岩土力学**, 2016, 37(12): 3347-3355.
- JIANG Ming-jing, ZHOU Wei, LIU Jing-de, et al. A constitutive model for anisotropic structured sandy soil based on micromechanical mechanism[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(12): 3347-3355.
- [51] 张伏光, 蒋明镜. 基于微观破损机理的胶结砂土三维本构模型研究[J]. **岩土工程学报**, 2018, 40(8): 1424-1432.
- ZHANG Fu-guang, JIANG Ming-jing. Three-dimensional constitutive model for cemented sands based on micro-mechanism of bond degradation[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(8): 1424-1432.

上接第 3754 页

- [16] 周凤玺, 朱顺望, 梁玉旺, 等. 变分极限平衡法对土质边坡稳定性的精确分析[J]. **岩土工程学报**, 2023, 45(7): 1341-1346.
- ZHOU Feng-xi, ZHU Shun-wang, LIANG Yu-wang, et al. Exact analysis of soil slope stability by using variational limit equilibrium method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2023, 45(7): 1341-1346.
- [17] LI X, LIU W. Study on the action of the active earth pressure by variational limit equilibrium method[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2010, 34(10): 991-1008.
- [18] 陈建功, 胡日成, 许明. 考虑合力作用点位置的主动土压力计算[J]. **工程力学**, 2016, 33(11): 132-139.
- CHEN Jian-gong, HU Ri-cheng, XU Ming. Active earth pressure calculation considering force point location[J]. **Engineering Mechanics**, 2016, 33(11): 132-139.
- [19] DIXIT R, MANDAL J. Bearing capacity of geosynthetic-reinforced soil using variational method[J]. **Geotextiles and Geomembranes**, 1993, 12(6): 543-566.
- [20] 陈榕, 栾茂田, 郝冬雪, 等. 加筋地基极限承载力的变分分解法[J]. **岩土工程学报**, 2010, 32(5): 774-779.
- CHEN Rong, LUAN Mao-tian, HAO Dong-xue, et al. The ultimate bearing capacity of reinforced foundation by variational solution[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2010, 32(5): 774-779.
- [21] ZHOU F X, MA Q. Exact solution for capillary interactions between two particles with fixed liquid volume[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2016, 37(12): 1597-1606.
- [22] ZHOU F, LI S, LAI Y. Three-dimensional analysis for transient coupled thermoelastic response of a functionally graded rectangular plate[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2011, 330(16): 3990-4001.